

note

Watanabe

October 14, 2007



# Contents

1 場の理論	5
1.1 Neother Theorem . . . . .	5



# Chapter 1

## 場の理論

### 1.1 Neother Theorem

Neother Theorem が保証することは、物理系に global な continuous symmetry があるとき、それに対応した保存量が存在することである。

ここでは、一般性よりも見通しの良さを優先して、内部対称性に限定する。結果として連続変換に対する不変性は、Lagrangian の Level で成立する。

系に存在する場を  $\phi_a(x)$  として、Lagrangian は、場の一回微分までの関数とする。

$$L = L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \quad (1.1)$$

連続変換は  $r$  コの実パラメータで記述されるとして、その無限小変換を次のように書く。

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a \quad (1.2)$$

$$= \phi_a(x) - i\epsilon_i(x)F_a^i[\phi_b(x)] \quad (1.3)$$

この変換をした前後でのラグランジアンの変化は、ラグランジアンを  $\phi_a, \partial_\mu \phi_a$  の関数で見ていることから、次のように書ける。

$$\delta L \equiv L(\phi'_a, \partial_\mu \phi'_a) - L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \quad (1.4)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_a} \partial_\mu(\delta\phi_a) \quad (1.5)$$

ここで、変換パラメータを時空に依存させていることから

$$\partial_\mu(\delta\phi_a) = -iF_a^i \partial_\mu \epsilon_i - i\partial_\mu F_a^i \epsilon_i \quad (1.6)$$

と書ける。 $\delta L$  全体を見たとき、 $\partial_\mu \epsilon_i$  の比例係数は、この式の第一項のみに比例したものだけである。これを次のように書くことにする。

$$J_\mu^i(x) \equiv -iF_a^i \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_a} \quad (1.7)$$

上の2式から  $\delta L$  は  $\epsilon$  と  $\partial_\mu \epsilon$  の一次関数で書ける。

$$\delta L = w^i(x)\epsilon_i + J_\mu^i(x)\partial^\mu \epsilon_i \quad (1.8)$$

ここで今の議論が Action の Level で不変であれば良いこと、 $\delta L = 0$  だったことを思い出す。すると第 2 項を部分積分することができて、 $w^i$  と  $J_\mu^i$  の間に次の関係が成り立っていることが分かる。

$$w^i(x) = \partial^\mu J_\mu^i \quad (1.9)$$

この結果と、系の持つ対称性が global( $\epsilon(x) = \epsilon$ ) だったことより

$$\delta L = \epsilon_i \partial_\mu J_i^\mu = 0 \quad (1.10)$$

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0 \quad (1.11)$$

が得られる。これは  $J_i^\mu$  が保存 current であることを示している。保存 current の 0 成分を空間積分したものは保存量になっている。

$$Q_a \equiv \int d^3x J_a^0(x) \quad (1.12)$$

実際、時間発展を調べると、

$$\dot{Q}^a = \int d^3x \partial^0 J_0^a(x) \quad (1.13)$$

$$= \int d^3x \nabla_i J_i^a(x) = 0 \quad (1.14)$$

になる。最後の等式は、ガウスの定理を使って、無限遠方で  $\phi_a = \partial_\mu \phi_a = 0$  になる境界条件を使った。

ここで実際に保存 current を計算する手続きを説明するために、 $\epsilon$  の時空依存性を復活させる。すると  $\delta L$  は次のように書ける。

$$\delta L = \epsilon_i \partial_\mu J_i^\mu + \partial_\mu \epsilon_i J_i^\mu \quad (1.15)$$

この式が役立つ点は、次の 2 つ。まず  $\delta L$  を計算し、

$$J_i^\mu = \frac{\partial \delta L}{\partial \partial_\mu \epsilon_i} \quad (1.16)$$

より保存 current を求めることができること。計算チェックとして、 $\delta L$  が  $\epsilon_i$  に依らないことを見れることである。つまり、

$$\partial_\mu J_i^\mu = \frac{\partial \delta L}{\partial \epsilon_i} \quad (1.17)$$

から保存 current の持つ性質  $\partial_\mu J_i^\mu$  を満足しているかをチェックできるということである。