ベクトル解析とその周辺

島田義弘

2014 年 8 月 5 日

まえがき

この本に興味を持っていただき、ありがとうございます。物理学を扱った Web サイト「物理のかぎしっぽ」のクロメルです。この本で必要とされる知識は線形代数と、微積分の知識です。

****年**月　　島田義弘（クロメル）

目次

第 1 章

ベクトル、行列の基本

ベクトルとは、複数の実数の成分を順番に並べたものです。この本では最初に主に扱うのは、成分を三つ、または四つもつベクトルで、そのベクトルの成分は実数（$\mathbb{R}$ で表します）であるとしておきます。それを、

$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

と書き、これを**三次元ユークリッド空間**と言います。同様に四次元ユークリッド空間として、

$$\mathbb{R}^4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

と書きます。この空間で、原点から伸びるベクトルにより、指定される位置を示すベクトルを**位置ベクトル**と呼びます。そんなに難しいことではなく、三次元空間は縦・横・高さの xyz 軸で指定されるので、三次元ユークリッド空間の元が一つ決まると、それは三次元空間内の一点を示す。という意味です。四次元ではさらにもう一つの方向 w 軸が加わると考えます。数学では式 (1.1) の様な表記はよく使われ、

$$(\text{その集合を表す記号}) = \{\ \text{集合の構成要素}\ |\ \text{構成要素の満たす性質}\ \} \tag{1.3}$$

という形式で集合を表します。高校までは、$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の様に書いていたと思いますが、大学では、ボールド体（太字体）を用いて、

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

の様に書きます。式 (1.4) の前者を線形代数の行列との関係で、**行ベクトル**、後者を**列ベクトル**と言います。行列を表記する時には、カンマ（,）を用いないのが普通ですが、この本では通例に従い、行ベクトルを表記する時には、カンマを用いることにします。ふつうにベクトルというと、列ベクトルのことを指すことが多いです。

ここで、横書きの文章では行ベクトルの方が書きやすいので、列ベクトルを表すのに、便利な記号を示します。それは**転置**と呼ばれ、左上から右下の線に対して線対称に成分を配置しなおしたもので、その操作を ^{T} で表します。つまり、

$$(a_1, a_2, a_3)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^T = (a_1, a_2, a_3) \tag{1.5}$$

この本では、式 (1.5) の上の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$ 等と表し、下の行ベクトルを $\boldsymbol{a}^T$ 等と表すことにします。つまり、列ベクトルを普通のベクトルとし、行ベクトルは列ベクトルの転置で表すのです。

また、全ての成分が 0 に等しいベクトルを**ゼロベクトル**と言い、$\mathbf{0}$ と書きます。

1.1　ベクトルの相等

ベクトルは座標空間のどこにあるかに関わらず、成分の値が順番も考えてすべて互いに全て等しい時、**ベクトルは等しい**と言い、イコール (=) で結びます。等しくないことを示す時には、ノットイコール (≠) で結びます。

つまり、例えば $\boldsymbol{a} = (1,2,3)^T, \boldsymbol{b} = (1,2,3)^T, \boldsymbol{c} = (2,3,1)^T, \boldsymbol{d} = (1,2,4)^T, \boldsymbol{e}^T = (1,2,3)$ の時、

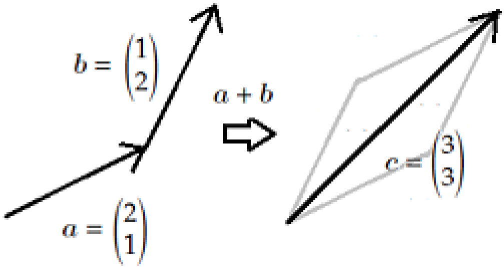

図 1.1　ベクトルの和

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{c}, \\ &\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e}^T \end{aligned} \tag{1.6}$$

が成立します。一言で言うなら、ベクトルとは「大きさ」と「向き」を持った量です。つまり、矢印として直感的に理解されるものなのです。

これに対応して、「大きさ」だけを持つ量を**スカラー**と言います。ベクトルには、和と差と二種類の積（内積・外積）があります。商はありません。順に見ていきましょう。

1.2　和と差、スカラー倍

二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の和 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とは、代数的な表現をすると、各々の対応する成分同士を和にした成分を持つベクトルです。つまり、

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

となります。幾何学的にはベクトルの作る矢印をつないでできる矢印が示すベクトルのことです。また、図 1.1 のようにベクトルの和は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ二つ使ってできる平行四辺形の対角線の示すベクトルであるとも言えます。また、ス

カラー α をベクトル $\boldsymbol{a}$ に掛けたものは、ベクトルの向きを変えずに α 倍したものになります。成分で示すと、

$$\alpha\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

ですね。これらの演算に関して、いつも成り立つ関係は、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1.9}$$

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a} \tag{1.10}$$

$$\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \tag{1.12}$$

です。

また、ベクトルの中でも線形代数で言う「基底を成す」単位ベクトルの組というものが存在します。**単位ベクトル**とは、後でベクトルの「長さ」を定義しますが、長さが 1 のベクトルであり、**正規**化されているとか、**規格**化されていると言います。また、そのセットの任意の二つのベクトルが直交する時、つまり、ベクトル同士が 90° の角を成す時、**直交系**を成すと言います。。これら二条件を満たす基底を**正規直交基底**と言います。

ベクトルのセットが「基底を成す」とは、つまり、n 次元空間内のどんなベクトルでも、そのベクトル達のスカラー倍の和で表され（このスカラー倍の和を**線形結合**と言います。式 (1.14) の様な和のことです。）、しかも、それを実現しうるベクトルの組で、最も少ないベクトルの数（さらに詳しく言えば n 本）で構成されることを言います。この時、それを実現する線形結合は一意です。つまり、スカラー係数の組は唯一となります。n 次元空間の全てのベクトルをそのセットのベクトルの線形結合で表現できることを**完全**であるといい、特に正規直交したものを、**正規直交完全系**と言います。「系」とはベクトルの系列の様な意味です。正規直交完全系は、正規直交基底と同じ意味です。

ベクトルを考える時、x, y, z 軸は特別な意味を持ちます。その方向を向いた単位ベクトルの組を**基本ベクトル**と言います。言葉で言うと難しく感じますが、例えば、三次元デカルト座標系（普通の三次元空間）内では、

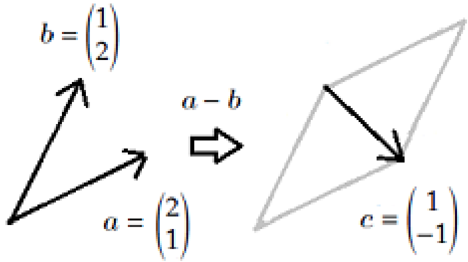

図 1.2　ベクトルの差

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

の三本のベクトルが基本ベクトルです。つまり、 x 軸の正方向を向いた長さ 1 のベクトルが、$\boldsymbol{e}_x$ 等ということです。これらは、他にもこの順に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とか、$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ 等のようにも書きます。基本ベクトルは正規直交基底となります。

また、後ほど扱うと思いますが、極座標 (r, θ, ϕ) に対しては、$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ という正規直交基底が定義できます。

ここで学んだ新たな表記として、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) &= a_1\boldsymbol{e}_x + a_2\boldsymbol{e}_y + a_3\boldsymbol{e}_z \\ &= a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{1.14}$$

と表すことができるようになります。特に和を表す記号である**シグマ記号**を用いた表記方法はとても便利です。また、差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ の幾何学的表現については、マイナスの符号が付いたベクトル $\boldsymbol{b}$ は、和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ において、図 1.2 のようにベクトル $\boldsymbol{b}$ の向きを逆転させたベクトル $-\boldsymbol{b}$、と $\boldsymbol{a}$ の和であると定義します。代数的には、それぞれの成分の差をとったベクトルということになります。

つまり、

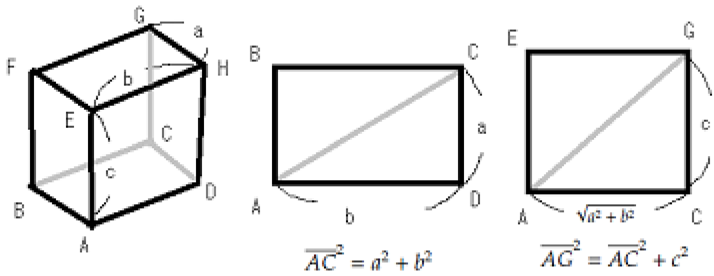

図 1.3　ピタゴラスの定理

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

ということです。

1.3　ベクトルの大きさ

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1.a_2, a_3)^T$ の**大きさ** $|\boldsymbol{a}|$ は、次の式で求められます。

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{1.16}$$

これは図 1.3 の様に、ピタゴラスの定理を二度使用することで、求まります。余談ですが、この関係は容易にさらなる高次元にも適用することができ、筆者はこの世の意外な単純さ、かつ、美しさを示す、素晴らしい事象だと思っています。

二次元はご存じピタゴラスの定理なので、書きません。四次元を書いておくと、

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \tag{1.17}$$

となります。

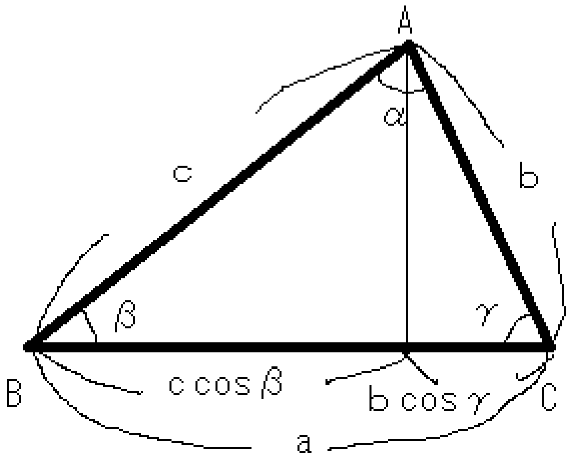

図 1.4　第一余弦定理

1.4　余弦定理

ここで、**内積**を定義する為、**余弦定理**の復習をしておきます。余弦定理は強力な定理です。扱う情報が三角形の辺の長さと頂点の角度だけの関係なので、二次元空間内だけでなく、三次元空間内の三角形への応用が容易です。さて、**第一余弦定理**と呼ばれる定理をまずは略式ですが証明します。次の様なものです。

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta \tag{1.18}$$

これは図 1.4 を見れば簡単でしょう。引く垂線を代えてやれば同様に、

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \tag{1.19}$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha \tag{1.20}$$

が成立します。さて、これらから最もポピュラーに余弦定理と呼ばれている関

係、**第二余弦定理**を導きます。式 (1.18) に a を掛けたものと、式 (1.19) に b を掛けたものを辺々足します。すると、

$$a^2 + b^2 = 2ab\cos\gamma + c(a\cos\beta + b\cos\alpha) \tag{1.21}$$

括弧内は式 (1.20) の右辺と同じなので、これは c に等しく、

$$a^2 + b^2 = 2ab\cos\gamma + c^2 \tag{1.22}$$

後は移項して、

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1.23}$$

となります。これはお馴染みの余弦定理ですね。

1.5　内積

ベクトルの二種類の積のうち片方がこの**内積**です。

式 (1.23) において a を $|\boldsymbol{a}|$、b を $|\boldsymbol{b}|$、c を $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$、$\gamma$ を θ のように書き換え、移項すると、

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma \\
&|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2ab\cos\theta \\
&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\ -\{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2\} \\
&\ = 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \\
&|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned} \tag{1.24}$$

ただし、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$、$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ です。式 (1.24) の最後の式は、左辺が三角関数の言葉、右辺が解析幾何の言葉であり、イコールで両者が関係づけられます。これは非常に有用な関係です。二次元以上の座標空間に二つのベクトル

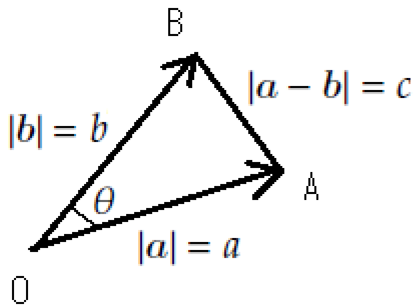

図 1.5 内積と余弦定理

の成す角度と言う概念を持ち込めるからです。このスカラーの値を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で表します。他の次元に拡張しておくと、二次元ベクトルでは、同様に

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 \tag{1.25}$$

四次元ベクトルでは、

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \tag{1.26}$$

が成立します。

この内積は、(1.24) の最終行の左辺の表現を見れば分かりますが、２つのベクトルの長さを固定した時、向きが等しいと最大、直交していると０、逆平行だと最小となります。どれだけ二つの向きがそろっているかの指標となります。

物理でベクトルの内積が出てくる例を挙げると、例えば、図 1.6 のように正規直交基底をなすベクトル $\boldsymbol{e}_n$ $(n=1,2,\cdots,N)$ を用意してやれば、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{e}_n$ 方向の成分を $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$ の様に取り出すことができます。この特定の方向の成分を抜き出せるということが、とてもよく使われる理由です。さて、この式の意味はよいでしょうか。原点と、ベクトル $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{e}_n$ に垂線を下ろした交点までの距離（スカラー）が、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_n$ となります。$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$ は、それに $\boldsymbol{e}_n$ という向きを追加したベクトルとなります。

ベクトル $\boldsymbol{e}_n$ が正規直交基底の時、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ は、

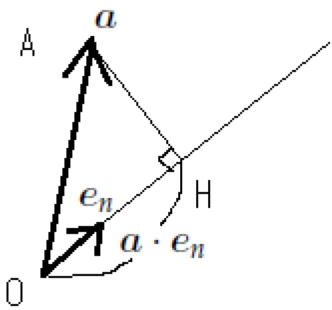

図 1.6　内積の使い方 ($\boldsymbol{e}_n$ は単位ベクトル)

$$\boldsymbol{a} = \sum_{n=1}^{N} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n \tag{1.27}$$

と分解できます。

後ほど扱おうと思いますが、これにより三次空間内のベクトルの回転などを扱えるようになります。それは、回転軸方向の変化しない部分と回転方向の変化する部分に分解するといったようなことができるからです。

ちなみに、$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ が成立しますが、$|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{a}$ ではありません。また、この本では内積は列ベクトル同士の演算と言うことにしておきます。

1.6　内積の持つ性質

ここで、内積の持つ性質を挙げておきます。

$$\text{(i)}\quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.28}$$

$$\text{(ii)}\quad (\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{1.29}$$

$$\text{(iii)}\quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0 \ (\text{特に } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0) \tag{1.30}$$

また、よく使う不等式に

$$\text{(iv)} \quad |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \tag{1.31}$$
$$\text{(v)} \quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{1.32}$$

があり、それぞれ順に**シュワルツの不等式**、**三角不等式**と言います。

次に外積、と行きたいところですが、行列などを先に勉強しなければなりません。

ここで、線形代数と言う分野に軽く触れ、ベクトルの回転[*1]などを扱えるようになりましょう。

線形代数や行列の基本は、多元連立一次方程式です。二元の場合を例にしてみます。

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned} \tag{1.33}$$

と言う方程式を、次の様に書きます。

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

です。ここで、行列とは変数の係数を正方形に並べたもののことを言います。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

とし、式 (1.34) をこれらの記号で書くと、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1.36}$$

となります。一般的には、行列のサイズは 2×2 だけとは限りません。行列を行ベクトルを縦に並べたものの集合と見た時、その横の並びを行、列ベクトルを

[*1] これはのちに出てくる rot のことではなく、ベクトルの向きを変える方の回転です。

横に並べたものの集合と見た時、その縦の並びを列と言います。、ここの行列 A は二行二列ということになります。そして、行列同士に和と差、積が定義できます。また、ベクトルでは存在しなかった商は、逆行列と言う形で定義できます。

行列を表現するには、大抵大文字のアルファベットを用い、例えば、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

と書き、これを略記して $[a_{ij}]$ と書いたりもします。そして、第 i 行かつ第 j 列にある数値を (i, j) **成分**と呼びます。

1.7　行列の和と差

行列の和と差は、直感に反しないものだと思います。

というのは、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ として、和は、

$$A + B = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

差は、

$$A - B = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

だからです。一般に和と差は、２行２列以外の行列間にも行えますが、同じサイズの行列同士でしか行えません。

1.8　行列の積

次は、積です。

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+br & cr+ds \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.40}
$$

これは、一般的には非可換です。つまり、以下の様に $AB \neq BA$ となります。

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.41}
$$

どんな順番で積を取るかを区別する為、A に「右から」B を掛けたものを AB、A に「左から」B を掛けたものを BA と言います。一般には l 行 m 列の行列 A に右からの掛け算を定義するには、右から掛ける行列 B は n を任意の自然数として、m 行 n 列でなければなりません。そして、その積の結果は、l 行 n 列の行列となります。行列の積はいくつか異なる見方があります。それを紹介しましょう。

（見方１）積の左の行列 A を m 次元の行ベクトル l 個の集合、積の右の行列 B を m 次元の列ベクトル n 個の集合として考えます。

すると、行列の積は

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\cdot\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\cdot\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2^T\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\cdot\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\cdot\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^T\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_l^T\cdot\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_l^T\cdot\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

と見ることができます。行列の積はいくつもの内積を並べたものなのです。

（見方２）本題の前に、**ダイアド積**と言うものを紹介しておきます。ダイアド積とは二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の積の一種の演算で、$\boldsymbol{ab}$ と書き、これは

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_lb_1 & a_lb_2 & \cdots & a_lb_n \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

という行列を表しています。ちなみに慣習上、行ベクトル $\boldsymbol{b}_i$ を転置を使わずに表記することにします。

さて本題です。今度は、行列 A を m 次元の列ベクトル n 個の集合、行列 B を l 次元の行ベクトル n 個の集合と見ます。すると、

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i \tag{1.44}$$

と表現できます。ダイアドでの表現を用いています。すっきりと書けますね。ご注意ください。さらに発展として、三つの行列の積 ABC は、A を k 行 l 列、B を l 行 m 列、C を m 行 n 列として、以下の様になります。

$$ABC = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{c}_j \tag{1.45}$$

です。

（見方３）

また、積 AB を二つの行列 A, B を列ベクトルを並べたものとみなしたものとして考えることもできます。まず、次のような行列（l 行 m 列）と列ベクトル（m 行 1 列）の積を考えると、

$$A\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1m} \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$= b_{11}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} + b_{12}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} + \cdots + b_{1m}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

これはつまり、右の列ベクトルの成分を係数とした左の列ベクトルの線形結合としたものであることが分かります。実は、右の列ベクトルを m 行 n 列の行列に置き換えた時、右の行列の第 i 列は他の列に依存しません。つまり、

$$A\boldsymbol{b}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{im} \end{pmatrix}$$

$$= b_{i1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} + b_{i2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} + \cdots + b_{im}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} (= \boldsymbol{c}_i) \tag{1.48}$$

であり、この結果を $\boldsymbol{c}_i$ と置くと、一般の l 行 m 列と m 行 1 列の行列 A, B の積は、

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

となります。

（見方４）

ここまで、左右二つの行列を行ベクトルとみるか列ベクトルとみるかで、積の解釈方法を見てきたわけですが、まだ、両方を行ベクトルとみる方法が残ってい

ます。つまり、見方 3 の様に、今度は左の行列を 1 行 m 列の行ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ とします。そうした時、

$$\boldsymbol{a}_i^T B = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{a}_i^T & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{c}_i^T & \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

その結果を、$\boldsymbol{c}_i^T$ とすると、一般の行列同士の積は、

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1^T \\ \boldsymbol{c}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_l^T \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

の様になります。

1.9　行列の区分け

行列の積の解釈を見てきたところで、証明抜きで行列の**区分け**と呼ばれる計算の分割された表記法を導入します。

例えば、次の 3 行 4 列の行列 A を考えます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

ここで次のように行列を分割します。

$$A = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ \hdashline 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{1.53}$$

この時、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

と言う、より小さな行列として考え、

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

と書きます。一般には l 行 m 列の行列 $A = [a_{ij}]$ を $p-1$ 本の横線と $q-1$ 本の縦線によって、pq 個の区画に分けます。これを行列の区分けと言います。こう分けた時、行列の積がどの様に表されるかが、我々が考えたいことなのです。上から s 番目左から t 番目の区画を A_{st} とする時、

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

と書けます。式 (1.56) の区分けにおいて、A_{st} が l_s 行 m_t 列だったとします。すると、

$$l = l_1 + l_2 + \cdots l_p$$
$$m = m_1 + m_2 + \cdots m_q \tag{1.57}$$

となるのは良いでしょう。この行列と積が定義できる、m 行 n 列の行列 $B = [b_{ij}]$ を考えます。先ほどの様に、

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

と分割します。区画の総数は qr 個になり、B_{tu} は m_t 行 n_u 列とします。この時、列の分割は自由ですが、行の分割は行列 A 列の分割にサイズの順番まで一致しなければなりません。

つまり、

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \cdots m_q \\ n &= n_1 + n_2 + \cdots n_r \end{aligned} \tag{1.59}$$

です。この時、C_{su} をその l_s 行 n_u 列として、積 AB を pr 個に区分けして書くと、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.60}$$

であり、

$$C_{su} = A_{s1}B_{1u} + A_{s2}B_{2u} + \cdots + A_{st}B_{tu} \tag{1.61}$$

となります。この式 (1.61) において、左辺は l_s 行 n_u 列、右辺は l_s 行 m_t 列と m_t 行 n_u 列の行列の積で、やはり、l_s 行 n_u 列となります。ここで、左右の l_s 行 n_u 列の行列の内の第 α 行 β 列の成分を比較してみます。ここで区分けする前の全体の行列の第 i 行 k 列の成分と対応させると、

$$\begin{aligned} i &= l_1 + l_2 + \cdots + l_{s-1} + \alpha \\ k &= n_1 + n_2 + \cdots + n_{u-1} + \beta \end{aligned} \tag{1.62}$$

と書くことができ、式 (1.61) の左辺は

$$\begin{aligned} C_{su}\text{の第}\alpha\text{行}\beta\text{列成分} &= C \text{ の第 } i \text{ 行 } k \text{ 列成分} \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \end{aligned} \tag{1.63}$$

ですね。一方、

$$A_{st}B_{tu}\text{の第}\alpha\text{行}\beta\text{列成分} = \sum_{j=m_1+m_2+\cdots+m_{t-1}+1}^{m_1+m_2+\cdots+m_t} a_{ij}b_{jk} \tag{1.64}$$

なので、

$$\text{式 (1.61) の右辺} = \sum_{t=1}^{q} A_{st}B_{tu}\text{の第}\alpha\text{行}\beta\text{列成分} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \tag{1.65}$$

となり、式 (1.61) が証明されました。この計算規則の具体例として、次を挙げておきます。

例

$p = q = r = 2$ の時、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{21}B_{22} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.66}$$

となります。

1.10　行列の積の性質

行列の積と和について、次が成立します。α と β はスカラーです。

$$(A+B)+C=A+(B+C) \tag{1.67}$$
$$A+B=B+A \tag{1.68}$$
$$(AB)C=A(BC) \tag{1.69}$$
$$(A+B)C=AC+BC \tag{1.70}$$
$$C(A+B)=CA+CB \tag{1.71}$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \tag{1.72}$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B \tag{1.73}$$
$$A(cB)=(cA)B=c(AB) \tag{1.74}$$

言いはぐれましたが、αA とは、A の全ての成分を α 倍したものです。そして、二度目になりますが、$AB=BA$ はいつも成り立つとは限りません。（むしろ、ほとんどの場合、等号は成立しません。）

1.11　様々な行列の分類

行列の中でも特に n 行 n 列の正方形をした行列同士は、和も差も積も（場合によっては商も）定義できます。これを n 次の**正方行列**と言います。

行列の積に関連して、任意の行列 A に積を施しても相手を変えない行列 E があります。行列としての名前は**単位行列**と言います。一般に n 次の単位行列とは、正方行列であり、左上から右下のライン上の成分（**対角成分**と言います）は全て 1 で、他は全てゼロとなる行列のことです。これを大抵 E や I で表します。特に n 次であることを示すには、E_n、I_n と表すとよいでしょう。つまり、

$$E_n=I_n=\left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n\text{ 列}}\right\} n\text{ 行} \tag{1.75}$$

ですね。単位行列は正方行列に対し、$AE=EA=A$ となります。また、対角成分以外はゼロの正方行列を**対角行列**と言います。

そして、すべての成分がゼロに等しい行列を**零行列**と言います。

1.12　線形独立、線形従属

次の話題に行く前に、少し準備をしておきます。

n 本のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と、任意のスカラー c_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i \tag{1.76}$$

を**線形結合**といいます。

そして、線形結合に対し、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \tag{1.77}$$

を満たすのが、係数 c_i が全てゼロの時に限る時 $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$、その n 本のベクトルは**線形独立**であると言います。また、ゼロでない係数の組み合わせがある時、その n 本のベクトルは**線形従属**であると言います。m 次元のベクトルに対し、$n > m$ の時、任意の n 本のベクトルのセットは線型従属になります。

例えば、基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

は線形独立です。また、

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

は、$2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ ですから、線形従属です。

少し前に出てきた**基底**と言う概念がこれで説明できるようになります。V と言うベクトル空間の有限個のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は、次の二条件を満たす時、基底を張ると言います。

1.$\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は線形独立である。

2.V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の線形結合として表される。

ちなみに $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が線形独立ならば、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を線形結合として、表す方法は一通りです。というのは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= b_1\boldsymbol{a}_1 + b_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{a}_n \\ &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \end{aligned} \tag{1.80}$$

の様に二通りの表し方ができたとすると、

$$(b_1-c_1)\boldsymbol{a}_1 + (b_2-c_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (b_n-c_n)\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{1.81}$$

より、線形独立ならば、等号成立は全ての係数 $(b_i-c_i)=0$ の時のみより、$b_i=c_i$ となるからです。

1.12.1　ランク

これから、**ランク**と言う概念を学びます。これは n 本の m 次元列ベクトルを並べたものである、$m\times n$ 次正方行列 A の、とある性質を表す言葉です。とりあえずは、$m=n$ の正方行列の時を考えます。簡単に言って、ランクが k であるとは、A を構成する列（または行）ベクトルの線形結合が k 次元の空間を表せる、ということです。別の言い方をすると、A のランクが k であるとは、A を構成する列（または行）ベクトルから線形独立な k 本を取り出すことができ、列（または行）と書いたのは、A が決定されると、列と見ても行と見てもランクは等しいからです。しかも、それが取り出せる最大本数であるということです。n 本の列ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ が k 次元空間を表せるとき、ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は k 次元空間を**張る**と言い、$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ に対して、$\mathrm{rank}A=k$ と書きます。具体的に例を

用いて考えてみましょう。簡単のため基本ベクトルを用いて説明してみます。一次元から順に見ていくと、

$n = 1$ の時、

数直線を考えます。この時、$\boldsymbol{e}_x = (1)$ の線形結合は、数直線の全ての点を表せます。この時、ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ は数直線（一次元空間）を張ります。つまり、$(a) = a\boldsymbol{e}_x = A\,(a)$ ですね。よって、この時 A のランクは 1 であり、これを $\mathrm{rank}A = 1$ と書きます。

一方、これがゼロベクトルだと、どんな線形結合をもってしても、数直線を張ることは適いません。これはゼロ次元空間を張ると考え、$\mathrm{rank}A = 0$ と書きます。

$n = 2$ の時、

二次元平面を考えます。この時、$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合は、二次元平面上の全ての点を表せます。$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix}$ とすると、$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ですね。よって、この時 A のランクは 2 であり、これを $\mathrm{rank}A = 2$ と書きます。

一方、$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ の様に、一次従属 $(3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0})$ だと、すべての線形結合は、一次元の直線 $y = -x$ を張ることになります。つまり、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (c_1 + 3c_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ですからね。この様な時は $\mathrm{rank}A = 1$ と書きます。

また A を構成するベクトルが全てゼロベクトルの時、先ほど同様に $\mathrm{rank}A = 0$ です。

最後に $n = 3$ の時、$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合は、面上の全ての点を表せます。

$$A = \begin{pmatrix} \\ \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \\ \end{pmatrix}$$

とすると、$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ですね。よって、この時 A のランクは 3 であり、これを $\mathrm{rank}A = 3$ と書きます。三次元ベクトルについて、$\mathrm{rank}A = 2, 1, 0$ の時もこれまでの議論と同様です。さて、n 次元空間を考え、ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の線形結合が n 次元空間を張る時、我々は行列

$$A = \begin{pmatrix} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ \\ \end{pmatrix}$$

を**フルランク**であると言います。つまり、次元数とランク数が等しい時、フルランクなのです。覚えておいて欲しいことは、「正方行列がフルランクであることは、その正方行列が逆行列を持つことに同値である」と言うことです。先取りして状況を述べておくと、n 次元空間内の（位置）ベクトルに対して、n 次元を張ることのできる基底ベクトルがあれば、それらの線形結合でそのベクトルを表現することができ、しかも一意にベクトルにかかる係数の組が決まる。と言えます。フルランクの行列同士 A, B の積 AB はやはりフルランクです。これは、A にも B にも逆行列が存在するので、$B^{-1}A^{-1}$ を考えれば、AB と積をとってみると、$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = E$ より、確かに逆行列が存在する。つまり、AB もフルランクです。

逆行列については、28 ページにおいて詳しく説明します。

せっかくランクの話が出てきたので、**グラム・シュミットの直交化法**という手法とランク標準形について学んでおきましょう。

1.13　グラム・シュミットの直交化法

互いに線形独立な k 本の k 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ を考えます。グラム・シュミットの直交化法とは、これらから正規直交系 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ を作り出す手法のことです。なお、話の展開の補助として $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ を用います。

まず、$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1$ を $|\boldsymbol{b}_1|$ で割って、正規化し $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|}$ とします。次に $\boldsymbol{a}_2$ に対し、

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 \tag{1.82}$$

を作ると、$\boldsymbol{e}_1$ に直交します。なぜなら、$\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{e}_1$ の内積を取ると、$|\boldsymbol{e}_1|^2 = 1$ より、

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)|\boldsymbol{e}_1|^2 = 0 \tag{1.83}$$

となるからです。ここで、$\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|}$ とします。

次に、

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \tag{1.84}$$

を作ると、今度は、**クロネッカーのデルタ**と呼ばれる、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.85}$$

を満たす記号を用いると、

$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ より、$\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に直交します。

そして、$\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|}$ とすると、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は正規直交系をなします。以後同様に進めていくと、k 本の線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_i$ から、正規直交系 $\boldsymbol{e}_i$ ができるのです。

これは、適当なスカラー u_{ij} $(i \leq j)$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix} \\
&= PU_k \\
&\equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.86}
$$

と言う変形ができたことになります。ここで、行列 A, P, U_k は全て k 次正方行列です。ポイントは、U_k が k 次のフルランクの上三角行列になることです。上三角行列とは、対角成分 u_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, k)$ から下の部分がゼロと言う行列です。対角成分自体とそれより上の部分はノンゼロでもそうでなくてもいいです。U_k がフルランクであることは、A, P が共に k 次元空間の基底であることより、フルランクであることから、

$$A = PU_k \tag{1.87}$$

$$U_k = P^{-1}A \tag{1.88}$$

これと、24 ページの議論から、フルランクの行列の積はフルランクなので、U_k はフルランクです。ここでは「k 次正方行列の」正規直交化について学びました。後にランク標準形というものを求める時に、この論法を使って議論します。

1.14　逆行列

先ほど、行列には商があると書きました。正確には、正方行列に対してのみ、逆数に相当する**逆行列**と言うものが存在することがあります。つまり、$AX = XA = E$ を満たす正方行列を逆行列と言い、A^{-1} と書きます。この様に逆行列が存在する時、行列 A は**正則**であると言います。逆行列とは、何を意味するのでしょうか？式 (1.34) で考えてみます。この行列の式に左から逆行列 A^{-1} を掛けてみます。すると、式 (1.69) より、結合律が成立しますから、

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
A^{-1}A\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \\
E\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}
\tag{1.89}
$$

となります。E は単位行列なので、$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となります。よって、式 (1.89) は、式 (1.34) を $\boldsymbol{x}$ について解いたことになります。具体的にはこの時、

$$
A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.90}
$$

となります。つまり、$\boldsymbol{x}$ について解けて、

$$
\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{1.91}
$$

です。

行列の積の（見方４）より、これは行列 A を行ベクトルの集合とみなし、連立方程式を表す行同士の和と差、スカラー倍を用いて、行列 A を単位行列に変形して、連立方程式へ解くことを表しています。この行同士の演算を**行基本変形**と言います。ただし、行基本変形とは一つ一つの変形のステップのことであり、最後にたどり着くのは、必ずしも単位行列とは限りません。一方、（見方３）の様に、列同士の演算を行い別の行列を得ることを、**列基本変形**と言います。

ちなみに、一般の二次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc \neq 0$ の時、正則となり、次の逆行列を持ちます。

$$
A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1.92}
$$

確かに $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ となることを確認してみてください。

また、別の言い方をすると、**逆行列の意味**は、ずばり、

$$
\begin{aligned}
&A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
&\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&x_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1.93)
\end{aligned}
$$

に対し、右辺のベクトル $\boldsymbol{b}$ に等しくなるような、左辺のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の線形結合の係数 x_i を抜きだす操作だと言えます。そう、

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \\
E\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &= A^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (1.94)
\end{aligned}
$$

ですからね。大事な概念なので、もう一度書いておくと、ここで n 次元空間において A をなす n 個のベクトルの中に、二本以上のベクトルが向きを同じくしたり、三本以上のベクトルが一つの平面内に存在する時など、n 本のベクトルが n 次元未満の空間を張る時、これらのベクトルは**線形従属**であると言います。その時には n 次元空間内のベクトル全てを表現できなくなりますね。この時は、ベクトルは基底ではなくなり、逆行列は存在しなくなります。逆に行列 A が正則であること、つまり、逆行列が存在することは、あらゆる n 次元ベクトルが行列 A を構成する行、または列ベクトルの線形結合で表現できることと同値です。この時、行列 A は**フルランク**であると言いましたね。さらに言えば、そのベクトルが張る空間が k 次元の時、$\mathrm{rank} A = k$ と書き、**ランク**（または**階数**とも）は k であると言います。証明はしませんが、行列を行ベクトルの集まりとみる時も、列ベクトルの集まりとみる時も、同じ行列ならランクは等しいです。

1.14.1 逆行列の一意性

逆行列は存在するとしても一つしかありません。なぜなら、行列 A に対し二つの逆行列 X, Y が存在するなら、

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y \tag{1.95}$$

となり、一致することが示せるからです。

1.14.2 左逆行列と右逆行列の一致

ここまでで、$AX = XA$ と言う可換性が行列 A と逆行列 X に対し常に成立するのか、疑問に思った方がいるかと思います。よって、$AX = E$ を満たす行列 X を右逆行列 X_R、$XA = E$ を満たす行列 X を右逆行列 X_L と呼び、区別することにします。少し天下り的ですが、行列には**ケーリーハミルトンの定理**という恒等式があります。詳細については線形代数の教科書を見ていただきたいのですが、ここで使う性質は、n 次の正方行列に対し、適当な係数 α_i $(i = 0, 1, 2, \cdots n)$ に対し、

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i = 0 \ \ (\text{ただし、}\alpha_n \neq 0) \tag{1.96}$$

が成立するというものです。A^i は行列 A の i 乗です。特に $A^0 = E$ としておきます。この恒等式に右から X_R を掛けたものと、左から X_L を掛けたものを考えると、A^i には X_R を掛けても X_L を掛けても同じく A^{i-1} となりますから、それを移項して整理すると、

$$\alpha_0 X_R = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} A^i (\text{ただし、}\alpha_n \neq 0) \tag{1.97}$$

$$\alpha_0 X_L = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} A^i (\text{ただし、}\alpha_n \neq 0) \tag{1.98}$$

となりますので、$X_L = X_R$ となります。ちなみに、行列式 det を先取りして使いますが、$\alpha_0 = (-1)^n \det A$ であり、この値が 0 の時は、行列が正則でないことと同値ですので、逆行列が存在する時には、必ず $\alpha_0 \neq 0$ となります。

1.15　積の転置行列と積の逆行列

さて、ベクトルの転置を前に扱いましたが、行列にも転置があります。それは、$A = [a_{ij}]$ に対し、添え字を入れ替えた、$A^T = [a_{ji}]$ と表されるべきものです。

例として、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{に対し、} A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{1.99}$$

となります。さて、$A = [a_{ij}]$、$B = [b_{kl}]$ に積が定義できるとき、$A^T = [a'_{ij}]$、$B^T = [b'_{kl}]$ とすると、$a_{ij} = a'_{ji}$、$a_{kl} = a'_{lk}$ です。ここで、AB の (i, j) 成分は $\sum_k a_{ik} b_{kj}$ ですから、$(AB)^T$ の (i, j) 成分はその i, j を入れ替えたものですから、

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} \tag{1.100}$$

最右辺は、$B^T A^T$ の (i, j) 成分ですから、

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{1.101}$$

となる事が分かります。

また、フルランクについて扱ったときに書きましたが、積の逆行列についても同様の関係がありましたね。つまり、

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \tag{1.102}$$

だったのでした。

1.16　行列式

行列式と言う概念があります。これは $n\times n$ の行列からスカラーを対応させる写像です。n 次元空間中に原点から n 本のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が伸びているものとします。

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} \tag{1.103}$$

であるとき、このベクトルを辺に持つ平行超多面体の超体積（高次元の超立体！）の大きさ V が、後に説明する記号 det を使って、

$$V=\mathrm{det}A\equiv\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1.104}$$

であると言えます。

この V を表していることの証明は後にします。行列では丸かっこで囲いますが、行列式を表すには、縦線で囲みます。

三次元立体の平行六面体を考えればわかるかと思いますが、原点から伸びる三本のベクトルがなす平行六面体は、三本が同一平面内にあったり、三本が同じ向きを向いていたりするとき、つまり、線形従属である時、体積はゼロとなります。これは高次元空間でも同様に、ベクトルが線形独立でない時、超体積はゼロとなります。このことから、n 次元空間中の n 本のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が線形独立なことを調べるのに、それらを並べた行列を A として、行列式を計算してもし $\mathrm{det}A\neq 0$ なら A に含まれるベクトルのなす平行超多面体の超体積は 0 でない、つまり、線形独立であるということを判定できます。

さて、行列式の具体的な計算方法を述べましょう。ポイントは n 次の行列式は、$n-1$ 次の行列式の線形結合で表されるということです。

一次の行列式は、

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11} \tag{1.105}$$

つまり、成分がそのまま行列式の値となります。また、二次の行列式は次のようになります。行列の一行目の成分が右辺にどのように配置されるかに注目ください。

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{1.106}$$

ここで、マイナスの符号が最後の辺の第二項に付くのは間違いではありません。そうしておくと、きれいな理論が展開される、そういうものだと思ってください。三次行列式も書いてみます。これも一行目が二次の行列式の線形結合の係数となります。

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &+ a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1.107}$$

ここまで、一行目をキーとする展開でしたが、任意の行や列でもできます。これを**ラプラス展開**と言います。

例えば、二列目で三次の同じ行列を展開してみます。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{1.108}$$

つまり、行列式を構成する線形結合の係数を n 次の行列式の (i, j) 成分に選ぶとき、元の行列式の i 行目と j 列目を取り除いて $(-1)^{i+j}$ を掛けた $n-1$ 行列式（これを**余因子**と言います。これはスカラーです。）とセットになって行列式の項

に寄与することになります。念のため書いておくと、余因子とは、$\tilde{A}_{ij}$ で表されるスカラーであり、$A = [a_{ij}]$ に対して、

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j-1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j-1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j-1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{1.109}$$

と定義されます。この余因子を用いると一般の n 次の行列式 $\mathrm{det}A$ は、行で展開して、

$$\mathrm{det}A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij} \tag{1.110}$$

もしくは、列で展開して、

$$\mathrm{det}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij} \tag{1.111}$$

となります。ちなみに n 次の行列式は、$n!$ 個の項で構成されます。

1.17　基本変形と基本行列

さて少し話題を変えて、基本変形について、27 ページで軽く触れましたが、もう少し詳しく説明しておきます。**基本変形**を扱うのは、主に次の４つの場合かと思われます。

１．ランク標準形を求める時

２．逆行列を求める時

３．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く時

４．行列式を求める時

基本変形はこの時、力を発揮します。ランク標準形については、後ほど説明しようと思います。これらの演算は次の三種類の**基本行列**と呼ばれる正則行列を注

目する行列に掛けることで、望みの変形を行います。これら基本行列を X とすると、変形される行列 A に左から掛ける時、つまり、XA は行にたいするの演算となり、右から掛ける時、AX は列に対する演算となります。

a. 行同士（列同士）を入れ替える

b. 行（もしくは列）を定数倍する

c. ある行（列）の定数倍を別の行（列）に加える

a. で、例えば第 i 行と第 j 行 $(i \neq j)$ を入れ替える操作を表す n 次正方行列を $P_n(i,j)$ とすると、単位行列の対角成分の 1 の内、(i,i) 成分と (j,j) 成分が 0 であり、その代り、(i,j) 成分と (j,i) 成分が 1 となっている正方行列です。ただし、$i \neq j$ に限ります。例えば、四次の $P_4(2,4)$ は、

$$P_4(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.112}$$

を左から掛ける操作となります。また、第 i 列目と第 j 列目を入れ替える操作は、右から掛ければいいです。

b. で、第 i 行目を c 倍する n 次正方行列は、$Q_n(i;c)$ とすると、単位行列の (i,i) 成分のみ c である行列です。ただし、$c \neq 0$ に限ります。例えば、$Q_3(2;3)$ は、

$$Q_n(2;3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.113}$$

となります。

最後に、c. で、第 i 行に第 j 行の c 倍を足す操作です。これは、単位行列の対角成分はそのままで、(i,j) 成分のみ c の値を持ちます。ただし、$i \neq j$ に限ります。例えば、

$$P_5(2,4;5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.114}$$

の様になります。これは、左から掛けると、第 i 行に第 j 行の c 倍が足されます. また、右から掛けると、第 j 列に第 i 列の c 倍が足されます。

ここで単純な割に面倒な証明を必要とするので、ここには証明を書きませんが、積の det は det の積という性質があります。

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{1.115}$$

ここで、$\det A \neq 0$ と言う条件は、A が正則（フルランク）であるということに同値です。そして、それぞれ、$P_n(i,j), Q_n(i;c), R_n(i,j;c)$ の行列式は、

$$\det P_n(i,j) = -1 \tag{1.116}$$
$$\det Q_n(i;c) = c \tag{1.117}$$
$$\det R_n(i,j;c) = 1 \tag{1.118}$$

です。

それぞれ、$P_n(i,j), Q_n(i;c), R_n(i,j;c)$ の逆行列は、それぞれ、

$$P_n(i,j)^{-1} = P_n(i,j) \tag{1.119}$$
$$Q_n(i;c)^{-1} = Q_n(i;\frac{1}{c}) \tag{1.120}$$
$$R_n(i,j;c)^{-1} = R_n(i,j;-c) \tag{1.121}$$

となります。

1.18　ランク標準形

これから、$m \times n$ 行列の**ランク標準系**というものを紹介します。ランク標準形 F とは、行列に基本変形を施していって、最終的に $O_{i,j}$ を $i \times j$ のゼロ行列として、

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.122}$$

の様に、1 が (i,i) 成分 $(i = 1,2,\cdots)$ に並んだものになります。今のところ、現れる 1 の数は不明と言うことにしておきましょう。正方行列に限らないので、1 の列を延長していっても、一番右下の成分まで伸びているとは限りません。任意の行列は、基本変形のみにより、この形に変形できます。

1.18.1　非正方行列に対するグラム・シュミットの直交化法

26 ページにおいて、k 次正方行列についてのグラム・シュミットの直交化法を学びましたが、これは非正方行列に対しても同様に考えられます。$m \times n$ 行列について考えていきます。

その前に上三角行列 U_k の行列式について考えなければなりません。ここにでてくる U_k がフルランクであることを示すのです。

（定理）一般に上三角行列（また下三角行列）の行列式は、対角成分の積となります。

(証明）

上三角行列 U_k に対して、行列式を考えます。簡単の為、3 次正方行列を考えます。すると、第一列のラプラス展開によって、

$$\begin{aligned} \det U_k &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix} \\ &= u_{11} \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{vmatrix} \\ &= u_{11}u_{22} \begin{vmatrix} u_{33} \end{vmatrix} \\ &= u_{11}u_{22}u_{33} \end{aligned} \tag{1.123}$$

となります。 □

さらに、グラム・シュミットの直交化法は、

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i - \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{e}_j}{|\boldsymbol{a}_i - \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{e}_j|} \geq \frac{\boldsymbol{a}_i - \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{e}_j}{|\boldsymbol{a}_i|} \tag{1.124}$$

と言う式の性格上、分母が有限（無限大でない）ですから $\boldsymbol{e}_i$ には、ノンゼロの係数を持った $\boldsymbol{a}_i$ が成分として含まれます。これはつまり、グラム・シュミットの方法で出てくる上三角行列の (i,i) 成分 $i = 1, 2, \cdots, k$、つまり、すべての対角成分がノンゼロとなることを表しています。ということは、グラム・シュミットの直交化法で現れる上三角行列 U_k は、フルランク $\det U_k \neq 0$ であるということです。

（定理）一般に、$m \times n$ 行列 A は、$\min(a, b)$ を a, b の最小値とすると、$k \leq \min(m, n)$ として、グラム・シュミットの直交化により、次のように表現できます。ただし、適宜列の交換を行って[*2]、左から数えて k 本のベクトルが線形独立になるようにします。列を交換してもベクトルの張る空間は変わりませんよね。

[*2] 例えば、$A = \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}_1 & 4\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$ となっていたら上三角にはなりませんよね。この場合、第二列と第三列を入れ替えて、$A = \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{e}_1 & 4\boldsymbol{e}_2 & -\boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix}$ 等とする必要があります。

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&(\rightarrow \text{並び替え} \rightarrow) \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} & \boldsymbol{a}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_n} \end{pmatrix} \\
&= P_k X \qquad (1.125) \\
&\equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & Y_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \qquad (1.126)
\end{aligned}
$$

となります。ただし、A と P_k が $m \times n$ 行列、X が n 次正方行列です。$Y_{k,n-k}$ は $k \times n - k$ 行列で何らかの値を持つ小行列です。A を構成する独立な列ベクトルは k 本であるので、$i = k + 1$ 本以降の $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ の線形結合であるから、$U_k, Y_{k,n-k}$ 以外の部分の成分はゼロになるわけです。 □

ここの議論が分からない方は、15 ページにある行列の積の（見方 3）を復習すると良いでしょう。行列の**ランク**とは、正にこの式における k のことです。この本では、このような定義にしておきます。

1.18.2　ランク標準形の意味

ここで、**ランク標準形** F に変形することができます。その方法は、まず $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ に新しい正規直交基底を追加していってできた、m 次正則行列 P_m の逆行列（正規直交基底の場合、逆行列はただの転置になります。）を $P_m^{-1} = P_m^T$ とします。また、X に対して、U_k の逆行列 U_k^{-1} を部分に持ち他の成分は全てゼロの n 次行列を $Z = \begin{pmatrix} U_k^{-1} & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$ とします。

この時、A の列を並び替えた行列 $AC = P_k X$*3に左から P_n^T、右から Z を掛けると、

*3 列基本変形の内の $P_n(i, j)$ のいくつかの積が C だと考えてください。

$$
\begin{aligned}
F &= P_m^T ACZ \\
&= P_m^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} & \boldsymbol{a}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_n} \end{pmatrix} Z \\
&= P_m^T P_k XZ \\
&\equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} U_k & Y_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k^{-1} & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_k & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & O_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_k & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.127}
$$

この計算の際、X は k 本の線形独立なベクトルを持つので、ランクは k となります。P_m^T はフルランク、Z は U_k^{-1} の区画としては k 次のフルランクですから、できたランク標準形には、1 が k 個ならぶことになります。つまり、ランク標準形は A のランクの大きさ k 個だけ、1 を含むことになります。6 行目、左の行列の計算は「行列の積」の（見方１）をみればわかるかと思います。

1.19　外積

外積について説明します。幾何学的に言って、**外積**とは、異なる方向を向いた二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$、$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して、どちらとも直交するベクトルのことで、その正の向きは、図 1.7 のように、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の成す角度 θ、（ただし $0 \leq \theta \leq \pi$）を $\boldsymbol{a}$ から測りはじめて（つまり $\boldsymbol{a}$ の向きは $\theta = 0$）$\boldsymbol{b}$ に向かう時、その方向の回転に対して、右ねじの進む方向を正としています。その大きさは、$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$ と定義します。

これを解析幾何的に考えてみましょう。異なる方向を向いた二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のそれぞれに直交したベクトル $\boldsymbol{c} = (x, y, z)$ を求めましょう。成分の関係を

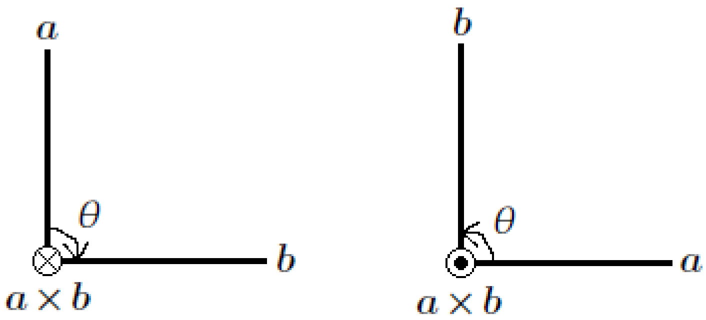

図 1.7　外積（左の外積は紙面奥向き、右は紙面手前向きを表す）

方程式にすると、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ より、

$$\begin{aligned} a_1x+a_2y+a_3z&=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z&=0 \end{aligned} \tag{1.128}$$

となります。この方程式は求めるべき未知数が x, y, z の３つで、その関係式が式 (1.128) の２つです。よって、これは自由度が１（＝３－２）であり、未知数のいずれか一つを決定すると、全ての値が決定されます。$z=z_0$ として、x, y について解こうと思います。式 (1.128) より、行列で書き直すと、

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_3z_0 \\ -b_3z_0 \end{pmatrix} \tag{1.129}$$

より、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} (a_2b_3-a_3b_2)z_0 \\ (a_3b_1-a_1b_3)z_0 \end{pmatrix} \tag{1.130}$$

だから、後の為に z_0 も左辺に含めると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z_0 \end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} (a_2b_3-a_3b_2)z_0 \\ (a_3b_1-a_1b_3)z_0 \\ (a_1b_2-a_2b_1)z_0 \end{pmatrix} \tag{1.131}$$

となり、ここで自由だった z_0 を対称性を考慮して、$z_0 = a_1b_2 - a_2b_1 (= z)$ と固定すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} (= \boldsymbol{c}) \tag{1.132}$$

とベクトル $\boldsymbol{c}(= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ が決定されます。式 (1.132) は行列式を用いて、覚えやすく書くことができ、

$$\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.133}$$

と表現できます。ちなみに、式 (1.132) の成分で（大変ですが）計算すれば、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{c}|^2 &= |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\theta \end{aligned} \tag{1.134}$$

となることから、外積の絶対値は、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$ を満たすことが分かります。これは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しいです。外積は他の次元への拡張ができないと言われています。しかし、著者が思うに、例えば四次元だったら、3 つのベクトルの積 $\boldsymbol{d}$ として、

$$\boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z & \boldsymbol{e}_w \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \tag{1.135}$$

が考えられると思います。これは三本の独立なノンゼロベクトル $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ に直交し、四次元空間中の三本のベクトルを辺として持つ三次元平行六面体の体積を長さに持つベクトルとなります。直交していることは例えば、

$$\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.136}$$

となることから分かるでしょう。この演算は四次元空間中のベクトルの回転を考えるときに重要になってきます。こう考えると、二次元への外積の拡張 $\boldsymbol{b}$ は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_2, -a_1) \end{aligned} \tag{1.137}$$

つまり、ベクトル $\boldsymbol{a}$ に大きさが等しく垂直なベクトルを求める演算と言うことになるでしょう。

1.20　外積の持つ性質

内積同様に、（三次元）外積の持つ性質を書きます。

$$\text{(i)} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.138}$$

$$\text{(ii)} \quad (\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{1.139}$$

$$\text{(iii)} \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \tag{1.140}$$

$$\text{(iv)} \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.141}$$

$$\text{(v)} \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{1.142}$$

$$\text{(vi)} \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.143}$$

が成立します。式 (1.140) はヤコビ律と言い、式 (1.141) と式 (1.142) はベクトル三重積、式 (1.143) はスカラー三重積と言います。

第 2 章

ベクトル方程式

ベクトルを用いることで、簡単な図形を表現できます。二次元から四次元まで、順番に考えて行きましょう。

2.1　二次元の図形

2.1.1　点

まずは二次元です。図形を成す点を表すベクトルを $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ で表すことにします。まず、点を表すベクトル方程式は、定数成分ベクトル $\boldsymbol{a}$ を用いて次のようになります。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \tag{2.1}$$

これはつまり、成分で書けば、

$$x = a_1 \tag{2.2}$$

$$y = a_2 \tag{2.3}$$

となります。自由度について言及しておくと、$\boldsymbol{x}$ は２成分なので２自由度です。ここに式 (2.3) の様に、二つのイコールで２自由度減少します。よって２－２＝０より、結果、ゼロ次元的になり、点を表すことになります。一般に「成分について」イコールがｎ個あると、自由度はｎだけ下がることになります。

2.1.2　直線

さて、次に平面における直線の方程式ですが、何と言っても、

$$y = ax + b \tag{2.4}$$

が有名ですね。しかし、大学になると直線の方程式はこれとは違う表現を使うことが多くなるかと思います。その違う表現とは、スカラー c を用いて、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} &= c \\ ax + by &= c \end{aligned} \tag{2.5}$$

というものです。位置ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ と定数成分のベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b)^T$ を考えます。式 (2.5) の意味するところは、この 2 ベクトルの内積が一定値 c となる点の集合であると言うことです。内積が一定ということは、ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な直線 l が条件を満たします。絵にすると図 2.1 の様になります。この考えている直線 l に垂直なベクトル $\boldsymbol{n}$ を**法線ベクトル**と言います。そして値 c に対し $\boldsymbol{n}$ の長さを N とすると、直線と原点の間の距離 d は、$d = \dfrac{c}{N}$ となります。これはどういうことかと言うと、距離 c にベクトルの長さ N がいくつ入るか、ということを示しています。

具体例で考えてみましょう。

$\boldsymbol{n} = (3, 4)^T$、$N = 5$、$c = 10$、つまり、

$$3x + 4y = 10 \tag{2.6}$$

を考えます。これは、法線と $\boldsymbol{x}$ の向きが一致する時、原点と直線の距離は最小となります。その時の d は 2 です。確認の為、長さ 2 で方向 $(3, 4)^T$ を向いた原点から伸びる位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $2 \times \dfrac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}(3, 4)^T$、つまり、$(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5})^T$ です。これを式 (2.6) に代入すると確かに関係を満たしています。

さらに言うなら、今度は平面上の任意の点 $P(x_0, y_0)$ と直線 $l : ax + by = c$ の間の符号付き距離 D （符号とは直線から見て法線ベクトル方向に点 P がある時に

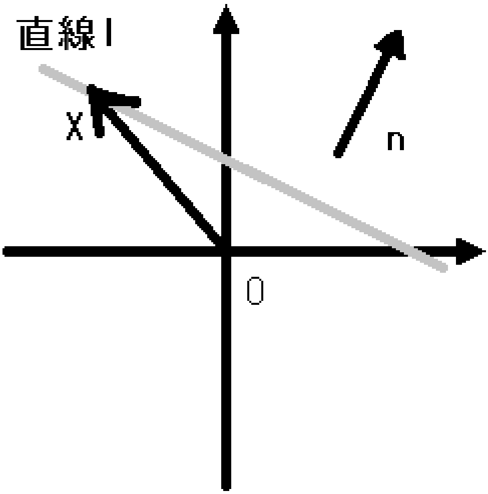

図 2.1　法線 $\boldsymbol{n}$ を持つ直線 $l : ax + by = c$

正とします。）を求めておきましょう。直線上の任意の点を $X(x, y)$ とし、図 2.2 の配置を考えます。すると、単位ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ への射影を考えれば、

$$
\begin{aligned}
D &= \overrightarrow{\mathrm{XP}} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}|} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OX}}) \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left((ax_0 + by_0) - (ax + by)\right) \\
&= \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\because ax + by = c)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

となります。もっと美しく書くには、直線の方程式を $ax + by + c = 0$ とすれば、

$$
D = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.8}
$$

となります。符号付きの距離というのは、平面幾何を考える時何かと便利です。覚えておくべきことは、点 P が直線 l より $\boldsymbol{n}$ 側にあれば、距離は正、逆なら負になるということです。高校数学で扱う距離の絶対値

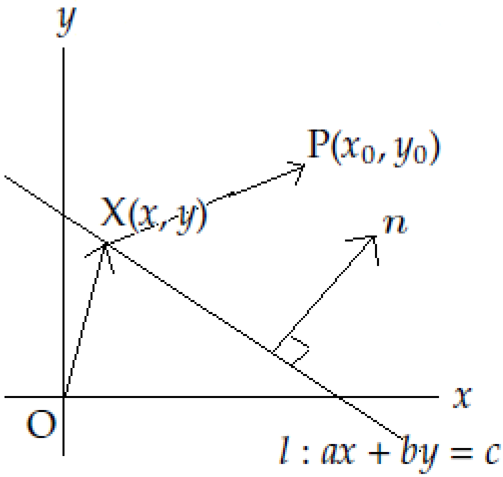

図 2.2　法線 $\boldsymbol{n}$ を持つ直線 $l : ax + by = c$

$$D' = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.9}$$

よりも、情報量が増えるのです。

2.1.3　円

円とは、中心の点から等距離の点の集合です。よって、原点を中心とする半径 $r\ (\geq 0)$ の円の方程式は、

$$|\boldsymbol{x}| = r \quad \text{もしくは、}$$
$$|\boldsymbol{x}|^2 (= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = r^2 \tag{2.10}$$

となります。

2.1.4　平行移動

一般に n 次元中の図形は、独立な[*1] N 個の条件

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \\ \text{もしくは、} f_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned} \tag{2.11}$$

で表され、その図形の次元は $n - N$ 次元となります。ちなみに不等式は基本的には次元を変えません。基本的、と言ったのは不等式でも例えば、二次元平面でも、$x \geq 1$ かつ $x \leq 1$ とすると、$x = 1$ となり、一次元空間に制限されることがあるからです。よって、基本的には等号の数が問題です。

ここで x_k $(1 \leq k \leq n)$ の方向に d_k だけ平行移動した場合、式 (2.11) はどうなるでしょうか？実は、式 (2.11) において x_k を $x_k - d_k$ に置き換えたものが、平行移動したものになります。つまり、等号が成立するのは、元の式よりも d_k だけ大きい時なのです。かっこよく書くと、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$、$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)^T$ を用いて、

$$f_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.12}$$

となります。

2.2　平行移動と回転（合同変換）

[*1] 「独立」とは、全く同じ条件があった場合、それらは一つとして数えるという意味です。

第 3 章

勾配、発散、回転

ベクトル解析と言えば、この章で扱う ∇（ナブラ演算子）が有名です。どんなものなのか、勉強していきましょう！

3.1 ナブラ演算子

ナブラ演算子 ∇ とは、ある種の微分を表すのに便利な表記法です。それは、デカルト座標系（xyz 軸のある普通の三次元直交座標系のことです。）の基本単位方向ベクトルを $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)^T, \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)^T, \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)^T$ と置いたとき、微分演算子（さらに詳しく言えば偏微分）を成分とするベクトルとみなして、

$$\begin{aligned} \nabla &\equiv \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

と書きます。**偏微分**とは、複数のパラメータ $x_1, x_2 \cdots$ を持つ、関数 $f(x_1, x_2, \cdots)$ に対して、例えば $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ は x_1 以外のパラメータをすべて定数と考えて、x_1 について微分したものです。例えば、$\dfrac{\partial}{\partial t}s^5t^3 = 3s^5t^2$ や $\dfrac{\partial}{\partial x}e^2x\log y = 2e^2x\log y$ 等が挙げられます。ベクトルであることから、∇ はベクトルを表すボールド体です。よ

く使われるのは、grad(勾配、グラディエント)、div(発散、ダイバージェンス)、rot(回転、ローテーション)、Δ(ラプラシアン) と呼ばれる演算です。あせらず、じっくり一つずつ勉強していきましょう。

3.2　grad とは

三次元空間を構成する点のそれぞれに実数 ϕ が対応している状況を考えます。これを実スカラー場といいます。引数は x, y, z の三つなので、$\phi(x, y, z)$ と書くことにします。ずばり、grad（**グラディエント**と読みます。日本語だと「**勾配**」と言います。）とはどちらの方向に行けば一番その値が増加する方向と増加率を、表す実数値ベクトルとなります。これは今度は各点にベクトルが対応しているので実ベクトル場といいます。つまり、

$$\begin{aligned}
\begin{array}{r}\text{（}\phi\text{の最も大きな増加率を}\\ \text{長さとする方向ベクトル）}\end{array} &\equiv \mathrm{grad}\,\phi(x, y, z) \\
&= \nabla\phi(x, y, z) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

となります。簡単な例を用いて理解してみましょう。デカルト座標系中の平面で法線 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)^T$ を持つものを考えます。その平面上で一定値をとり法線方向に $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ の増加率を持つスカラー場 $\phi(x, y, z)$ を考えます。このとき、$\phi(x, y, z)$ は $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$ として、次のように書けます。

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} \\
&= ax + by + cz
\end{aligned} \tag{3.3}$$

よろしいでしょうか？原点を通る「$\boldsymbol{n}$ に直交する平面上」に $\boldsymbol{r}$ がある時は、この内積 ϕ が 0 を示している状態です。つまり、例えば $\phi = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = 0$ は、原点を通

り $\boldsymbol{n}$ を法線としてもつ平面となります。ここで、この関数 ϕ の grad を取ってみましょう。すると、

$$\nabla\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(ax+by+cz)}{\partial z} \end{pmatrix} = (a,b,c)^T \tag{3.4}$$

と、この結果は $\boldsymbol{n}$ に一致することが分かります。しかも、これは微分演算なので、無限小の近傍だけにおいて、$\phi(x,y,z)$ がどの様な振る舞いをするかを見ることになります。よって、これで grad が

$$\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) = （\phi\text{が最も増加する増加率を長さとする方向ベクトル}） \tag{3.5}$$

を表していることが示せました。ちなみに grad ϕ のさす方向は、そちらに行けば増加する方向となります。

3.3　div とは

次は div（**ダイバージェンス**と読みます。日本語だと「**発散**」と言います。）これは、ベクトルを引数としてスカラーを返す関数です。div $\boldsymbol{a}$ が正の領域ではベクトル $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ がその点を中心に放射状にどれだけベクトルの大きさが増幅されるかを示しています。定義は、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} \equiv \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \tag{3.6}$$

この関数はとある演算を無限に微小な領域で実行したものと考えると、考えやすいです。つまり、その演算とは、デカルト座標系で三軸の向きに辺が平行な直方体で表される閉曲面を考えます。そこに入ってくるベクトルはマイナスの寄与、出ていくベクトルはプラスの寄与として、正味でどれだけベクトルが、出て行っ

たかを考えます。おおざっぱに、ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^T$ で考えると、まずは x 軸方向の寄与を考えると、平面 $x=x_0$ と $x=x_0+\Delta x$ という直方体の二つの面がありますので、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\text{ の }x\text{ 軸方向の増幅度}) &= -a_1(x_0,y_0,z_0)\Delta y\Delta z + a_1(x_0+\Delta x,y_0,z_0)\Delta y\Delta z \\
&= \frac{a_1(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-a_1(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

これは直方体を微小にしていくと、$\Delta x\to dx$、$\Delta y\to dy$、$\Delta z\to dz$ となり、式 (3.7) の割り算は x に関する偏微分となります。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\text{box size}\to 0}(\boldsymbol{a}\text{ の }x\text{ 軸方向の増幅度}) \\
=&\lim_{\text{box size}\to 0}\frac{a_1(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-a_1(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z \\
=&\frac{\partial a_1}{\partial x}dxdydz \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

$x=x_0$ と $x=x_0+\Delta x$ では、外へ向かう法線が逆なので、$a_1(x_0,y_0,z_0)$ には負の符号がついています。同様に、y 軸、z 軸について考え、足し合わせると、

$$
\lim_{\text{box size}\to 0}(\boldsymbol{a}\text{ の全方向の増幅度}) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (3.9)
$$

となります。ここで、div を次のように定義します。

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{a}\equiv\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z} \qquad (3.10)
$$

ちなみに、まだ分からなくて構いませんが（ガウスの法則について扱うときに詳しく言います。）、一般化して任意の閉曲面 Σ（その体積は V）に垂直で外側に向かう単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、面積分 $\int dS$ により、

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\lim_{\Sigma\to 0}\frac{\int_\Sigma \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS}{V} \qquad (3.11)
$$

と表されることを注意しておきます。これは形式的には、$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ の形をしており、そこから div $\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}$ とも書きます。そして、div $\boldsymbol{a} > 0$ の点を **source**（**湧き出し**）、div $\boldsymbol{a} < 0$ の点を **sink (吸い込み)** といいます。理由は簡単で、div $\boldsymbol{a} > 0$ では、ベクトルがその点を中心に放射状に広がっているように見え、逆は縮んでいるように見えるからです。このことは、文献 [3] に於いて、『発散はベクトル場の流れがどれだけ膨張するかを測る量だと言えます。』と説明されています。

具体的に二次元で例を挙げておくと、二次元の発散は $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ に対し $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y}$ であり、例えば図 3.1 は、全ての領域で $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 1$ を持つベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ を表示したものです。ベクトルの正の div を持つ領域が無限に続くため、無限遠でこのベクトル場は発散します（ベクトル長が無限大になります)。また、図 3.2 は $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ を満たすベクトル場 $\boldsymbol{B} = (y, 0)$ の例です。これは y 座標に比例する大きさを持つベクトルがありますが、左から入射したベクトルがそのまま大きさを変えずに右から抜けていくので、$\mathrm{div}\boldsymbol{B}$ は全ての領域で 0 となります。また、必ずしも放射状にならない例として、図 3.3$\mathrm{div}\boldsymbol{C} = 1$ を持つベクトル場 $\boldsymbol{C} = (x, 0)$ も挙げておきます。ここで扱ったのは二次元でのベクトル場ですが、三次元でも同様に考えられます。領域の端が辺であったものが、面に変わるだけです。

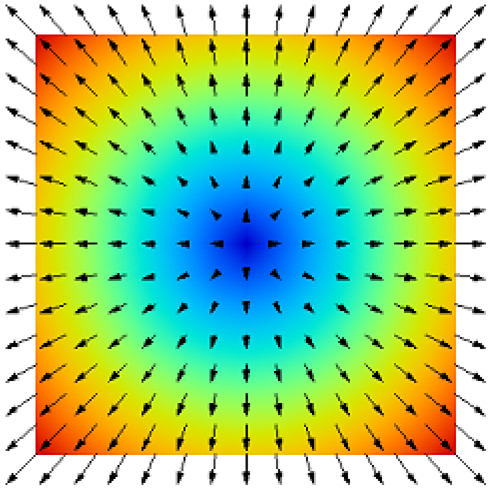

図 3.1　div $\boldsymbol{A} = 1$ を満たすベクトル場の例

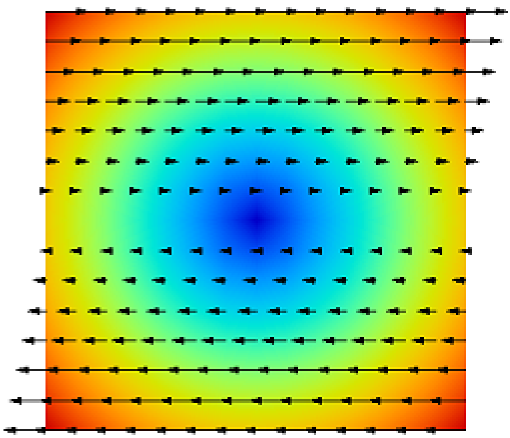

図 3.2　div $\boldsymbol{B} = 0$ を満たすベクトル場の例

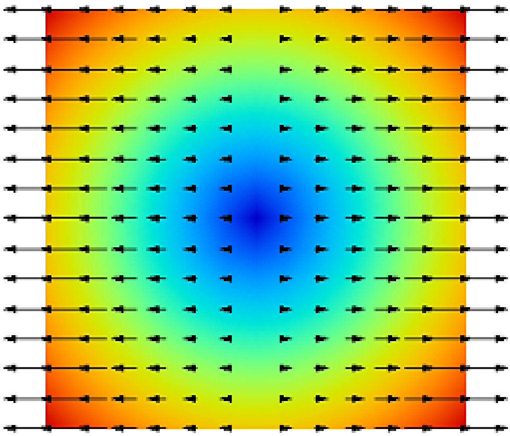

図 3.3 div $\boldsymbol{C} = 1$ を満たすベクトル場の例

参考文献

[1] 村上曜著,『力学』[楽しく考える物理シリーズ１], プレアデス出版,2011 年
[2] 川村清著,『電磁気学』[岩波基礎物理物理シリーズ３], 岩波書店,1994 年
[3] 千葉逸人著,『ベクトル解析からの幾何学入門』現代数学社,2007 年

索引