note

Watanabe

October 14, 2007

Contents

Chapter 1

場の理論

1.1 Neother Theorem

Neother Theorem が保証することは、物理系に global な continuous symmetry があるとき、それに対応した保存量が存在することである。

ここでは、一般性よりも見通しの良さを優先して、内部対称性に限定する。結果として、連続変換に対する不変性、Lagrangian の Level で成立する。

系に存在する場を $\phi_a(x)$ として、Lagrangian は、場の一回微分までの関数とする。

$$L = L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \tag{1.1}$$

連続変換は r コの実パラメータで記述されるとして、その無限小変換を次のように書く。

$$\begin{aligned} \phi_a(x) \to \phi'_a(x) &= \phi_a(x) + \delta\phi_a & (1.2) \\ &= \phi_a(x) - i\epsilon_i(x) F^i_a[\phi_b(x)] & (1.3) \end{aligned}$$

この変換をした前後でのラグランジアンの変化は、ラグランジアンを $\phi_a, \partial_\mu \phi_a$ の関数で見ていることから、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta L &\equiv L(\phi'_a, \partial_\mu \phi'_a) - L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) & (1.4) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_a} \partial_\mu (\delta\phi_a) & (1.5) \end{aligned}$$

ここで、変換パラメータを時空に依存させていることから

$$\partial_\mu(\delta\phi_a) = -iF^i_a \partial_\mu \epsilon_i - i\partial_\mu F^i_a \epsilon_i \tag{1.6}$$

と書ける。δL 全体を見たとき、$\partial_\mu \epsilon_i$ の比例係数は、この式の第一項のに比例したものだけである。これを次のように書くことにする。

$$J^i_\mu(x) \equiv -iF^i_a \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_a} \tag{1.7}$$

上の 2 式を δL に代入すると、変化量は ϵ と $\partial_\mu \epsilon$ の一次関数で書ける。

$$\delta L = w^i(x)\epsilon_i + J^i_\mu(x)\partial^\mu \epsilon_i \tag{1.8}$$

ここで今の議論が Action の Level で不変であれば良いこと、$\delta L = 0$ だったことを思い出す。すると第 2 項を部分積分することができて、A と B_μ の間に次の関係が成り立っていることが分かる。

$$w^i(x) = \partial^\mu J^i_\mu \tag{1.9}$$

この結果と、系の持つ対称性が global($\epsilon(x) = \epsilon$) だったことより

$$\begin{aligned} \delta L = \epsilon_i \partial_\mu J^\mu_i &= 0 && (1.10) \\ \partial_\mu J^\mu_i &= 0 && (1.11) \end{aligned}$$

が得られる。これは J^μ_i が保存 current であることを示している。保存 current の 0 成分を空間積分したものは保存量になっている。

$$Q_a \equiv \int d^3x J^0_a(x) \tag{1.12}$$

実際、時間発展を調べると、

$$\begin{aligned} \dot{Q}^a &= \int d^3x \partial^0 J^a_0(x) && (1.13) \\ &= \int d^3x \nabla_i J^a_i(x) = 0 && (1.14) \end{aligned}$$

になる。最後の等式は、ガウスの定理を使って、無限遠方で $\phi_a = \partial_\mu \phi_a = 0$ になる境界条件を使った。

ここで実際に保存 current を計算する手続きを説明するために、ϵ の時空依存性を復活させる。すると δL は次のように書ける。

$$\delta L = \epsilon_i \partial_\mu J^\mu_i + \partial_\mu \epsilon_i J^\mu_i \tag{1.15}$$

この式が役立つ点は、次の 2 つ。まず δL を計算し、

$$J^\mu_i = \frac{\partial \delta L}{\partial \partial_\mu \epsilon_i} \tag{1.16}$$

より保存 current を求める。計算チェックとして、δL が ϵ_i に依らないことを見ることである。つまり、

$$\partial_\mu J^\mu_i = \frac{\partial \delta L}{\partial \epsilon_i} \tag{1.17}$$

から保存 current の持つ性質 $\partial_\mu J^\mu_i$ を満足しているかをチェックできるということである。